ENSA-ALHOCEIMA **CP II**
ANALYSE 4 **SEMESTRE 2**

Exercice 1 :
Calculer les limites des suites suivantes :
$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx$, $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x} dx$, $w_n = \int_0^{+\infty} \frac{sin^n x}{x^2} dx$

$z_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \cos x}{1+n^2x^2} dx$, $t_n = n\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$, $x_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} sin^n x dx$
$y_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue bornée.
Etudier les limites des intégrales suivantes:

$I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$, $J_n = \int_0^{+\infty} nf(x)e^{-nx} dx$ et $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

Exercice 3 :
1- Montrer que: $lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} x^{\frac{1}{n}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

2- En déduire que: $lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

Exercice 4 :
Pour $(x, n) \epsilon]0,1[\times \mathbb{N}$, on pose:

$f_n(x) = \frac{lnx}{x^2-1} x^{2n+1}$, $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ et $\varphi(x) = \frac{xlnx}{x^2-1}$.

1- Montrer que φ est intégrable sur]0,1[.
2- En déduire que pour tout $n\epsilon\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur]0,1[.
3- Montrer que la suite $(I_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente.
4- Etablir l'égalité suivante:

$$\forall k \epsilon \mathbb{N}^* : \quad I_{k-1} - I_k = \frac{1}{4k^2}$$

et en déduire que: $I_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 5 :
Considérons la fonction f définie sur $([0, +\infty[)^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{ln(1+xy)}{1+x^2}$$

1) Etudier la dérivabilité de f par rapport à y sur [0, +∞[
et calculer $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2) Posons $I(y) = \int_0^y f(x,y)dx$

a- Montrer que I est dérivable sur [0, +∞[et calculer $I'(y)$.

b- Montrer que :

$$\mathrm{I}'(y) = \frac{ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{yArctany}{(1+y^2)}$$

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^y \frac{tArctant}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}Arctany * ln(1+y^2) - \frac{1}{2}\int_0^y \frac{ln(1+t^2)}{(1+t^2)}dt$$

4) En déduire $I(y)$

5) Donner la valeur de $\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Exercice 6 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

2) Calculer $f(0)$
et déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3) Posons $g(x) = f(x^2)$

a- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que:

$$g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt\ .$$

b- En déduire que:

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}:\ g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

c- Conclure que: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.